

# UNIDAD 1

## MÉTODOS NUMÉRICOS

**TEMA 1:**  
Cifras significativas y errores.

# ÍNDICE

<b>1. Unidad 1: Introducción a los métodos numéricos .....</b>	<b>3</b>
<i>Tema 1: Cifras significativas y errores .....</i>	3
<i>Objetivo:.....</i>	3
<i>Introducción: .....</i>	3
<b>2. Información de los subtemas .....</b>	<b>4</b>
2.1 <i>Subtema 1: Manejo de números en la computadora .....</i>	4
Rango para representación de números.....	5
Representación de números enteros.....	5
Formato de punto flotante .....	5
2.2 <i>Subtema 2: Cifras significativas .....</i>	7
Redondeo .....	8
Cálculos con cifras significativas.....	8
2.3 <i>Subtema 3: Exactitud y Precisión .....</i>	9
2.4 <i>Subtema 4: Error absoluto, relativo y de redondeo .....</i>	10
Error absoluto.....	10
Error Relativo.....	10
Cálculos de errores con datos experimentales .....	11
Errores de Redondeo .....	11
<b>3. Preguntas de Comprensión de la Unidad .....</b>	<b>12</b>
<b>4. Material Complementario.....</b>	<b>13</b>
<b>5. Bibliografía .....</b>	<b>14</b>

# 1. Unidad 1: Introducción a los métodos numéricos

---

## Tema 1: Cifras significativas y errores

### Objetivo:

Aplicar las diferentes representaciones del estándar IEEE para el manejo de números en la computadora, calcular los errores absoluto y relativo entre valores verdaderos y estimados, comprender los conceptos de exactitud y precisión.

### Introducción:

Los métodos numéricos son técnicas que permiten formular y resolver problemas matemáticos utilizando algoritmos iterativos que se basan en operaciones aritméticas, algunos problemas pueden ser muy difíciles o imposibles de resolver de forma analítica y para ello están los métodos numéricos como un importante recurso para resolver este tipo de problemas. La mayoría de los métodos numéricos requieren de varias iteraciones para llegar a la solución, misma que es aproximada al valor real que daría una solución analítica. En vista de aquello se debe calcular los errores para la estimación, estos errores dependerán en muchos casos de la cantidad de cifras significativas que se utilicen para los cálculos.

Debido al desarrollo de equipos de cómputo con procesadores de alta velocidad se pueden implementar los métodos numéricos y realizar miles de operaciones en un instante, en la ingeniería existen varias aplicaciones que se describirán a lo largo del curso, para la implementación de los diferentes métodos numéricos se utilizarán computadoras para efectuar los cálculos por ello es importante comprender como se representan los números en la computadora. Al utilizar la potencia de las computadoras podemos obtener un conjunto de iteraciones que luego pueden ser utilizadas para elaborar gráficas y poder interpretar la solución que se obtiene.

## 2. Información de los subtemas

### 2.1 Subtema 1: Manejo de números en la computadora

Para el manejo de los números en la computadora es necesario comprender el sistema numérico binario, como convertir números decimales, que es el formato que nosotros estamos acostumbrados a utilizar para representar diferentes cantidades a formato binario de 1 y 0 que son los que se almacenan en las computadoras.

- Veamos cómo convertir un número entero  $(235)_{10}$  a binario

$$\begin{array}{r}
 235 \div 2 = 117 \quad R=1 \\
 117 \div 2 = 58 \quad R=1 \\
 58 \div 2 = 29 \quad R=0 \\
 29 \div 2 = 14 \quad R=1 \\
 14 \div 2 = 7 \quad R=0 \\
 7 \div 2 = 3 \quad R=1 \\
 3 \div 2 = 1 \quad R=1 \\
 \hline
 (235)_{10} \rightarrow (11101011)_2
 \end{array}$$

- Para convertir un número decimal  $(358.7)_{10}$  a binario  
Separamos la parte decimal y la parte entera y realizamos la conversión  $(358)_{10} + (0.7)_{10}$

$358 \div 2 = 179$	$R=0$	$0.7 \times 2 = 0.4 + 1$
$179 \div 2 = 89$	$R=1$	$0.4 \times 2 = 0.8 + 0$
$89 \div 2 = 44$	$R=1$	$0.8 \times 2 = 0.6 + 1$
$44 \div 2 = 22$	$R=0$	$0.6 \times 2 = 0.2 + 1$
$22 \div 2 = 11$	$R=0$	$0.2 \times 2 = 0.4 + 0$
$11 \div 2 = 5$	$R=1$	$0.4 \times 2 = 0.8 + 0$
$5 \div 2 = 2$	$R=1$	$0.8 \times 2 = 0.6 + 1$
$2 \div 2 = 1$	$R=0$	$0.6 \times 2 = 0.2 + 1$

$$(358)_{10} \rightarrow (101100110)_2 \quad (0.7)_{10} \rightarrow (.1011001\dots)_2$$

La representación del número decimal a binario quedaría:

$$(358.7)_{10} \rightarrow (101100110.1011001)_2$$

- Convierta el número binario  $(10111.10101)_2$  a base 10  
Separamos en dos partes para hacer los cálculos, los dígitos antes de la coma y después de la coma.

$$(10111)_2 \text{ y } (.10101)_2$$

$$(10111)_2 \rightarrow 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = (23)_{10}$$

$$(.10101)_2 \rightarrow \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} = (0.65625)_{10}$$

$$(10111.10101)_2 = (23.65625)_{10}$$

### Rango para representación de números

$n \rightarrow$  número de bits

números sin signo  $\subset \mathbb{N} [0, 2^n - 1]$

números con signo  $\subset \mathbb{Z} [-2^n, 2^n - 1]$

### Representación de números enteros

#### Representación de +53 en una cadena de 8 bits

+ el primer bit es 0

$(53)_{10}$  a binario es: 110101

0	0	1	1	0	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

#### Representación de -53 en una cadena de 8 bits

- el primer bit es 1

$(53)_{10}$  a binario es: 110101 el complemento a dos es cambiar el bit a partir del primer 1 de derecha a izquierda se cambian los bits quedando: 1001011

1	1	0	0	1	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

### Formato de punto flotante

La representación binaria de los números reales se realiza de acuerdo al estándar IEEE754. El número de punto flotante consta de tres partes: el signo (+ o -), la mantisa que contiene la cadena de bits significativos y el exponente, estos tres elementos se juntan y se almacenan en una palabra computadora.

Existen tres niveles de precisión de los números flotantes que son: precisión simple 32 bits, doble precisión 64 bits y precisión extendida 80 bits (Sauer, 2012). Las 3 partes en las que se dividen cada uno de los formatos se muestra a continuación:

Precisión	Signo	Exponente	Mantisa
Simple (32)	1	8	23
Doble (64)	1	11	52
Extendida (80)	1	15	64

**Tabla 1:** Niveles de precisión de números flotantes

**Fuente:** (Sauer, 2012)

- Para el bit de signo: si es positivo se coloca 0 y si es negativo 1
- Para el exponente sesgado se utiliza la siguiente formula:

$$2^{n-1} - 1$$

n corresponde al número de bits del exponente

- Para normalizar la mantisa se deja la coma a la derecha del primer 1 de la cadena de bits. Si se desplaza la coma hacia la izquierda el exponente se incrementa, si se desplaza la coma hacia la derecha el exponente se decrementa para no alterar el número.

**Ejemplo**

Realice la representación del número (358.7)<sub>10</sub> a punto flotante de 32 bits

Solución

Primero convertimos a binario el número que da como resultado (101100110.1011001)<sub>2</sub>

Se debe normalizar la mantisa para ello se debe dejar la coma a la derecha del primer número 1, para este caso habrá que desplazar la coma 8 posiciones y el exponente se debe incrementar en 8.

$$1.011001101011001 \times 2^8$$

Como es un número positivo el bit de signo es 0

Como la representación es de 32 bits, el número de bits para el exponente es de 8, es decir n=8.

El exponente sesgado sería:  $2^{8-1}-1 = 127$  a esto debemos sumar el coeficiente del exponente

$127+8= 135$  este valor se convierte a binario 10000111

La mantisa normalizada es: 011001101011001

La representación de (358.7)<sub>10</sub> en formato de 32 bits sería:

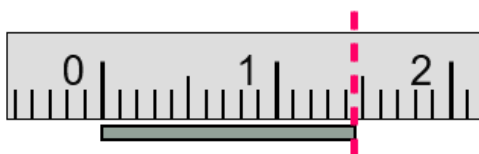
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+	Exponente								Mantisa																							

## 2.2 Subtema 2: Cifras significativas

Antes de analizar los errores asociados a los métodos numéricos es importante repasar conceptos de cifras significativas.

La confiabilidad de un valor numérico se designa mediante cifras o dígitos significativos (Chapra & Canale, 2006)

Por ejemplo, en la siguiente figura 1 si utilizamos dos cifras podríamos indicar que la medida del objeto es 1.4 cm o 1.5cm, pero alguien pudiera decir que la medida realmente está entre ambos valores y utilizaría 3 cifras significativas para expresar el valor como 1.45cm



**Figura 1:** Medición de un objeto

**Fuente:** Elaboración propia

Las cifras significativas representan el número de dígitos que se ofrecen con certeza en las mediciones y/o cálculos.

Es sencillo determinar en un número las cifras significativas, pero en algunos casos puede generar confusión, a continuación, se describen algunas reglas útiles para determinar las cifras significativas.

**Regla 1:** Todos los números son significativos, excepto el cero.

32,5425 tiene 6 cifras significativas

546 tiene 3 cifras significativas

12300 tiene 3 cifras significativas

0,00564 tiene 3 cifras significativas

0,1234 tiene 4 cifras significativas

**Regla 2:** Los ceros entre cifras significativas, son significativos

0,2005 tiene 4 cifras significativas

240,05 tiene 5 cifras significativas

**Regla 3:** Los números en notación científica son significativos

$7,4 \times 10^{-3}$  tiene 2 cifras significativas

$5,82 \times 10^5$  tiene 3 cifras significativas

**Regla 4:** En los números decimales, los ceros ubicados al final de la coma son significativos

12300,0 tiene 6 cifras significativas

0,03450 tiene 4 cifras significativas  
 74,00 tiene 4 cifras significativas  
 $5,80 \times 10^6$  tiene 3 cifras significativas

**Regla 5:** Si un número no tiene punto decimal y termina con uno o más ceros, estos no se consideran significativos, si se coloca el punto decimal entonces si son significativos.

6800 tiene 2 cifras significativas  
 5700. tiene 4 cifras significativas

### Redondeo

**Regla 1:** Si el próximo dígito a redondear es menor o igual a 4 se deja igual

Ejemplo: redondear a 3 cifras

7,43341  $\rightarrow$  7,433  
 0,087332  $\rightarrow$  0,0873

**Regla 2:** Si el próximo dígito a redondear es mayor o igual a 5 se incrementa en 1 el dígito a redondear.

Ejemplo: redondear a 3 cifras

3,1287  $\rightarrow$  3,13  
 18,361  $\rightarrow$  18,4

### Cálculos con cifras significativas

**Sumas y Restas:** La respuesta tendrá el mismo número de lugares decimales que el dígito con menor número de lugares decimales. (Nieves & Dominguez, 2014)

Ejemplo:

$2,054 + 7,4 = 9,454$  se redondea a 9,5  
 $15,3 - 5,3 = 10$  se escribe como 10,0

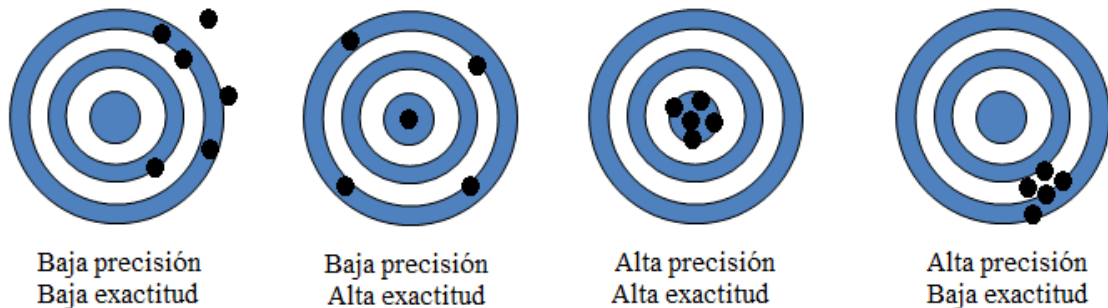
**Multiplicación y división:** Las cifras resultado de la multiplicación o división no deben superar al menor número de cifras significativas de las cantidades en la operación.

Ejemplo:

$15,32 \times 14,852 = 227,53264$  que daría como resultado 227,5  
 $76,456 / 2,04 = 37,4784$  que daría como resultado 37,5

## 2.3 Subtema 3: Exactitud y Precisión

Tanto las medidas como los errores en cálculos se pueden caracterizar con respecto a la exactitud y precisión. La exactitud es que tan cercano está el valor medido o calculado con respecto al valor verdadero. La precisión es que tan cercanos están unos de otros los valores calculados o medidos. (Chapra & Canale, 2006)



**Figura 2.** Ejemplo de puntería para conceptos de exactitud y precisión

Fuente: <https://bit.ly/2TRGkkr>

Los conceptos de exactitud y precisión se ilustran mediante el lanzamiento de dardos en una práctica de tiro al blanco. Exactitud sería que un lanzamiento caiga en el círculo central, mientras que la precisión sería que los lanzamientos estén muy cercanos unos de otros, aunque no estén sobre el círculo central. En los sistemas se busca que las mediciones y los cálculos que se efectúan sean exactos y precisos. La inexactitud se la define como sesgo y es una desviación sistemática con respecto al valor verdadero. Para que los métodos numéricos satisfagan los problemas deben ser lo más exacto posible al valor verdadero. (Sauer, 2012)

## 2.4 Subtema 4: Error absoluto, relativo y de redondeo

### Error absoluto

Se define como el valor absoluto de la diferencia entre  $p^*$  que es una aproximación de  $p$ .

(Burden & Faires, 2011)

$$E_A = |p^* - p| \quad (1)$$

### Error Relativo

Es un error porcentual, de la división del error absoluto para el valor verdadero.

$$E_R = \frac{|p^* - p|}{p}, \quad p \neq 0 \quad (2)$$

### Ejemplo 1

Calcule el error absoluto y error relativo de las siguientes aproximaciones

- a) El valor de  $1/6$  con aproximación de 0.166

$$E_A = |0.166 - (1/6)| = 6.66 * 10^{-4}$$

$$E_R = \frac{6.66 * 10^{-4}}{1/6} * 100 = 0.4\%$$

- b) El valor de  $8/3$  con aproximación de 2.67

$$E_A = |2.67 - (8/3)| = 3.33 * 10^{-3}$$

$$E_R = \frac{3.33 * 10^{-3}}{8/3} * 100 = 0.125\%$$

- c) El valor de  $1/7$  con aproximación de 0.1428

$$E_A = |0.1428 - (1/7)| = 5.7142 * 10^{-5}$$

$$E_R = \frac{5.7142 * 10^{-5}}{1/7} * 100 = 0.04\%$$

- d) El valor de  $e$  con aproximación de 2.72

$$E_A = |2.72 - e| = 1.72 * 10^{-3}$$

$$E_R = \frac{1.72 * 10^{-3}}{e} * 100 = 0.0633\%$$

- e) El valor de  $\sqrt{13}$  con aproximación de 3.605

$$E_A = |3.605 - \sqrt{13}| = 5.513 * 10^{-4}$$

$$E_R = \frac{5.513 * 10^{-4}}{\sqrt{13}} * 100 = 0.01529\%$$

### Cálculos de errores con datos experimentales

En el campo de la ingeniería es muy común realizar la toma de datos y/o mediciones de un sistema, en este caso se debe seguir las siguientes recomendaciones a fin de efectuar los cálculos de errores.

(Rodríguez, 2011)

- Repita la medición al menos 4 veces para evitar errores accidentales
- Se tomarán como valor verdadero a la media producto de las mediciones
- Con el valor verdadero podemos calcular los errores absolutos y relativos

### Ejemplo

Las siguientes medidas corresponden a la medición de temperatura en una oficina: 23.12 °C, 23.04°C, 22.98°C, 23.08°C. Determine los errores absoluto y relativo en cada una de las mediciones.

$$\bar{T} = \frac{23.12 + 23.04 + 22.98 + 23.08}{4} = 23.05$$

Medida	E <sub>A</sub>	E <sub>R</sub>
23.12	23.12 – 23.05  = 0.07	=(0.07/23.05)*100=0.3037%
23.04	23.04 – 23.05  = 0.01	=(0.01/23.05)*100=0.04338%
22.98	22.98 – 23.05  = 0.07	=(0.07/23.05)*100=0.3037%
23.08	23.08 – 23.05  = 0.03	=(0.03/23.05)*100=0.1302 %

**Tabla 2:** Errores absolutos y relativos mediciones de temperatura

**Fuente:** Elaboración Propia

### Errores de Redondeo

Los errores de redondeo se originan porque se emplean un número determinado de cifras significativas para los cálculos ya sea de forma manual o en la computadora, hay números que tienen infinita cantidad de decimales como  $\pi$ ,  $e$  o  $\sqrt{7}$  y no pueden ser representados de forma exacta es entonces donde se producen los errores de redondeo, recordando además que las computadoras utilizan representaciones binarias. (Gutiérrez, Olmos, & Casillas, 2010)

## 3. Preguntas de Comprensión de la Unidad

### ¿Cómo se calcula el valor del exponente sesgado para un número de doble precisión?

Para un número en formato doble precisión  $n=11$  para el exponente, al aplicar la formula quedaría  $2^{11-1}-1=1023$ , a partir de este valor se suman o se resta el número de posiciones que se recorre la coma para normalizar la mantisa

### ¿Qué rango de valores se pueden representar en una cadena de 16 bits?

Para los números con signo el rango está definido por:

$$n = 16$$

$$\left[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1\right] = [-32768, 32767]$$

### ¿Cómo quedaría la mantisa normalizada del siguiente número flotante 0,0001001101110?

Se debe recorrer la coma hacia la derecha hasta el primer uno

$$1,001101110 \times 2^{-4}$$

### ¿Cómo quedaría el número 2,456783 truncado a dos cifras decimales?

Para el truncamiento simplemente se corta el número hasta la cantidad de números indicado,

2,45

### ¿Se mide el largo de un terreno y se obtiene 1998cm, pero se sabe que el valor verdadero es de 2000cm, por otra parte, se mide una tabla para una mesa y da 58cm, el valor verdadero es de 60cm, que error usted utilizaría en este caso, absoluto o relativo?

Si calculamos el error relativo para ambos casos es de 2cm, ahora el error absoluto para la medición del terreno es de 0.1 y de 3,33 para la mesa, esto indica que la medición del terreno fue buena, mientras que la medición de la mesa tiene un error considerable. Por tanto, se concluye que para este caso es mejor el resultado del error relativo.

## 4. Material Complementario

---

Los siguientes recursos complementarios son sugerencias para que se pueda ampliar la información sobre el tema trabajado, como parte de su proceso de aprendizaje autónomo:

### **Videos de apoyo:**

Números coma flotante: <https://bit.ly/3kZ2qNw>

Cifras Significativas: <https://bit.ly/3oVMxK9>

Error absoluto y relativo: <https://bit.ly/3oY5pbG>

Exactitud y Precisión: <https://bit.ly/32ekKLs>

### **Bibliografía de apoyo:**

- Burden, R., & Faires, D. (2011). *Numerical Analysis*. (BOOKS/COLE, Ed.) (Ninth). Boston.
- Chapra, S., & Canale, R. (2006). *Métodos numéricos para ingenieros*. (McGrawHill, Ed.) (Quinta). México

### **Links de apoyo:**

Link de libros: <https://bit.ly/34WB0Td>

## 5. Bibliografía

---

- » Burden, R., & Faires, D. (2011). *Numerical Analysis*. (BOOKS/COLE, Ed.) (Ninth). Boston.
- » Chapra, S., & Canale, R. (2006). *Métodos numéricos para ingenieros*. (McGrawHill, Ed.) (Quinta). México.
- » Gutiérrez, J., Olmos, M., & Casillas, J. (2010). *Análisis Numérico*. (McGrawHill, Ed.). México. Retrieved from <http://librosysolucionarios.net/>
- » Nieves, A., & Dominguez, F. (2014). *Métodos Numéricos aplicados a la ingeniería*. (Patria, Ed.) (Primera). México.
- » Rodríguez, L. (2011). *Análisis numérico básico Un enfoque algorítmico con el soporte de Matlab*. Guayaquil.
- » Sauer, T. (2012). *Análisis Numérico*. (PEARSON, Ed.) (Segunda). México. Retrieved from <http://librosysolucionarios.net/>