UNIDAD
3

CÁLCULO INTEGRAL Y VECTORIAL

TEMA 2:

Volumen de Sólidos

FR0018/ v1.0 / 18-11-2019

UNEMI ONLINE

ÍNDICE

1. Unidad 3: Aplicación de la integral 3

   1.1 Objetivo 3

   1.2 Introducción 3

2. Información de los subtemas 4

   2.1 Método de capas y arandelas 4

   2.2 Método de cascarones 21

3. Recursos complementarios 29

4. Bibliografía 30

1. Unidad 3:

» Objetivo:

Utilizar el cálculo integral para encontrar volúmenes de sólidos de revolución formados por curvas definidas por funciones; utilizando los métodos de capas, arandelas y el método de cascarones cilíndricos.

» Introducción:

Las técnicas de integración tienen diversas aplicaciones, una de las cuales fueron estudiadas en compendios anteriores, como es el área de una figura definida por una función. En este caso, estudiaremos la manera de determinar el volumen de un sólido de revolución generado al momento que una función $y = f(x)$ o $x = g(y)$ gira alrededor de un eje. Se describirán y explicará a detalle tres métodos relevantes a la hora de calcular dichos volúmenes: el método de capas, el método de arandelas, y el método de cascarones. Cada uno de los métodos mencionados, surgen de la misma idea de dividir la región acotada en n cilíndros, y de esta manera realizar la suma de Riemman, fundamentada en la idea de que $n \to \infty$. Como sabemos, la suma de Riemann se la puede expresar o tiene cierta relación con la integral, y por ende, el volumen de estos sólidos se lo puede trabajar como una integral definida de una función.

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

2. Información de los subtemas

2.1 Método de capas y arandelas

La integral definida es de gran importancia para encontrar o calcular áreas de formas no poligonales o de funciones representadas en un plano de coordenadas. Además, el cálculo integral también es necesario y relevante para determinar volúmenes que se originan a través de una función, para entender esto se presenta la siguiente figura:

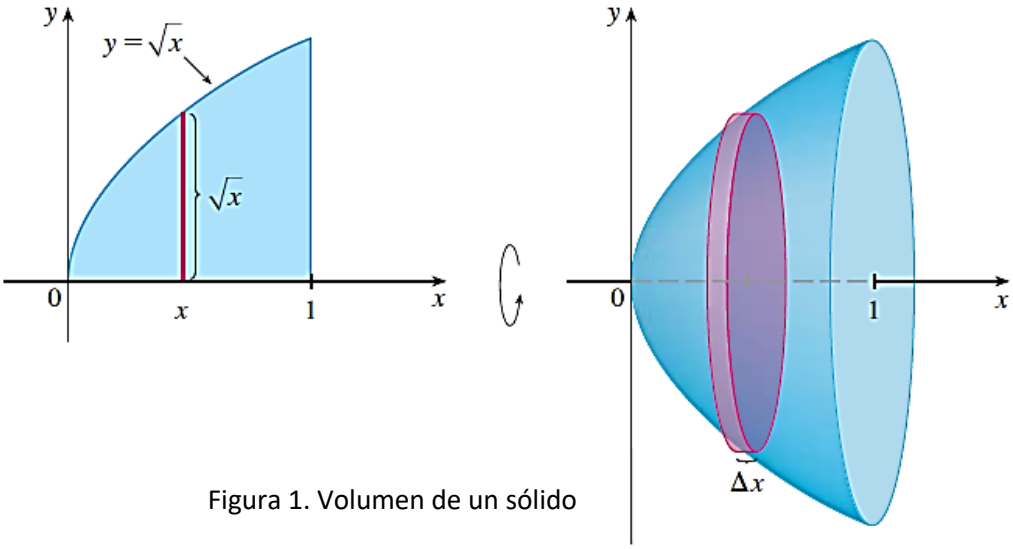


Figura 1. Volumen de un sólido

Fuente: (Stewart, 2012)

Como se puede observar, en la imagen de lado izquierdo tenemos la gráfica de una función $y = \sqrt{x}$; dicha función se la ha hecho girar sobre el eje x obteniendo la figura mostrada en la parte derecha. Ha esta última imagen nombrada se la llama sólido de revolución, y gracias a la integral, podemos calcular su volumen.

Antes de comenzar a explicar los métodos para calcular volúmenes de sólidos de revolución, tenemos que tener en claro la definición de volumen. Para ello observaremos y analizaremos las siguientes formas:

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

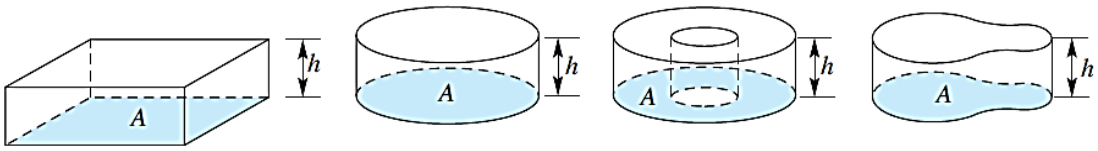


Figura 2. Volumen de ciertas formas

Fuente: (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007)

Lo primero que se puede notar es la presencia de un área A en la base de las figuras geométricas y también una altura h. Esto quiere decir que la superficie A se mueve a lo largo de una altura h, para así formar el sólido en cuestión. Un ejemplo descriptivo sencillo para representar las palabras anteriores sería: "Suponga que tiene rodajas de mortadela, estas rodajas de mortadela son la superficie A; ahora bien, si colocáramos varias rodajas de mortadela una encima de otra hasta llegar a cierta altura h, tendríamos formado un cilindro".

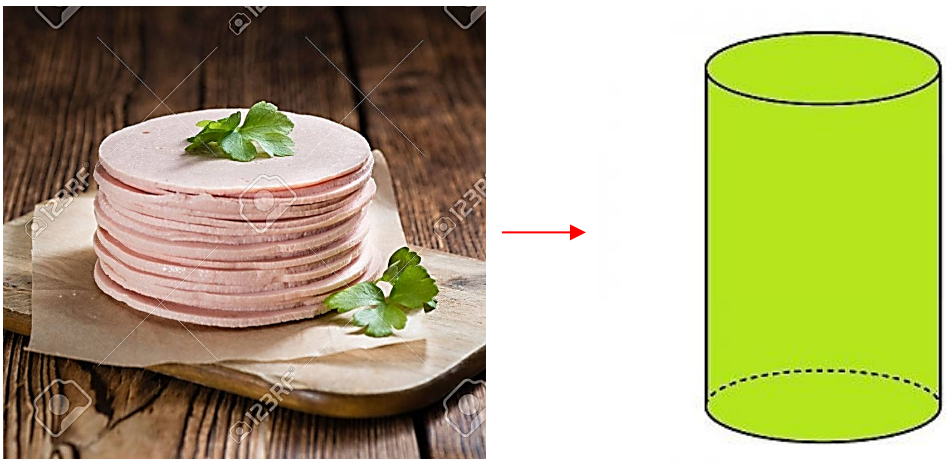


Figura 3. Rodajas de mortadela
Fuente: (123RF, s.f.)
Link: http://bit.ly/2MTqLFN

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Por lo tanto, la expresión matemática para determinar el volumen de un sólido es:

$$V = A \cdot h$$

La fórmula descrita antes es la base que se utilizará para definir el volumen desde la perspectiva del cálculo integral.

Método de capas.

Para encontrar volúmenes se utilizará la misma lógica aplicada para áreas; es decir, dividir la figura, en este caso el sólido de revolución, en n partes para obtener de esta manera un valor aproximado. Para ello, se tiene la siguiente gráfica:

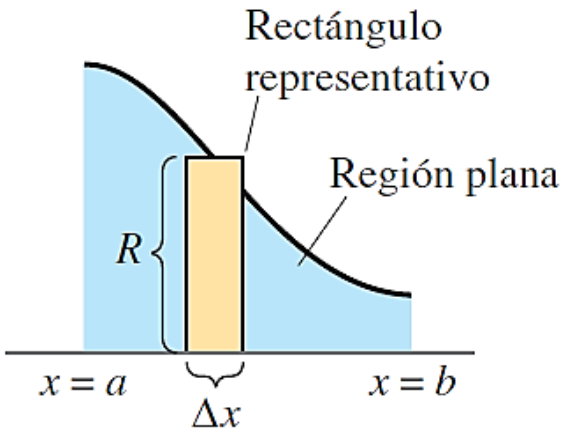


Figura 4. Gráfica de una función $f(x)$
Fuente: (Larson & Edwards, 2010)

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Tenemos un rectángulo con dimensiones $R = f(x)$ y un incremento Δx; ahora bien, si hacemos girar dicha gráfica sobre el eje x, se formará un sólido de revolución al cual se le procederá a calcular su volumen.

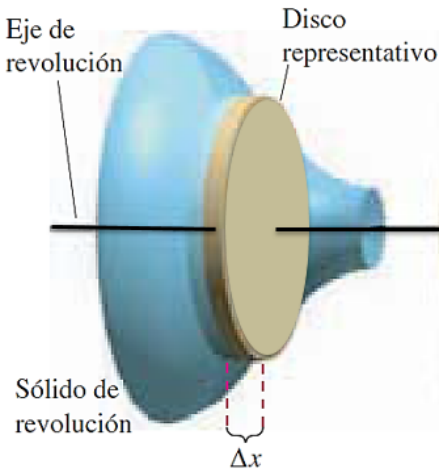


Figura 5. Sólido de revolución
Fuente: (Larson & Edwards, 2010)

Al realizar el giro, el rectángulo de la figura 4 ahora es un cilindro (Disco representativo). Las dimensiones de este disco son: altura Δx y radio $R = f(x)$. Partiendo de la fórmula:

$$V = A \cdot h$$

Donde: $$A = \pi R^2$$

Tendremos: $$V = \pi R^2 h$$

$$V = \pi [f(x)]^2 \Delta x$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Con esta fórmula se podría calcular el volumen de tal cilindro. Para determinar el volumen total del sólido de revolución, tendríamos que dividir la figura en muchos cilindros, como se muestra a continuación:

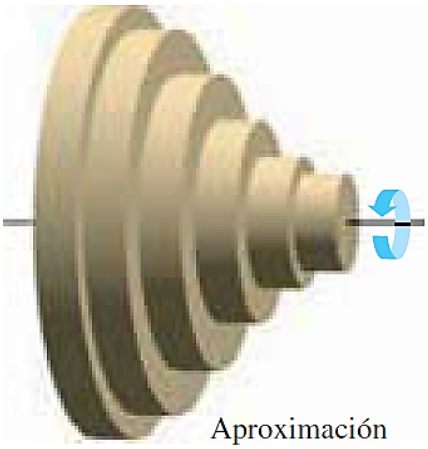


Figura 6. Sólido de revolución
Fuente: (Larson & Edwards, 2010)

Sabiendo que, mientras más divisiones cilíndricas se tengan, el valor del volumen será más exacto. Por lo tanto, podemos definir el volumen de la siguiente manera:

Volumen: Sea un sólido de revolución, definido en un intervalo $a \leq x \leq b$, donde $R = f(x)$ y $h = \Delta x$. Entonces el volumen es:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x)]^2\,\Delta x = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Método de capas: ejemplos

Ejemplo 1: Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por $f(x) = \sqrt{x}$ y $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$ alrededor del eje x.

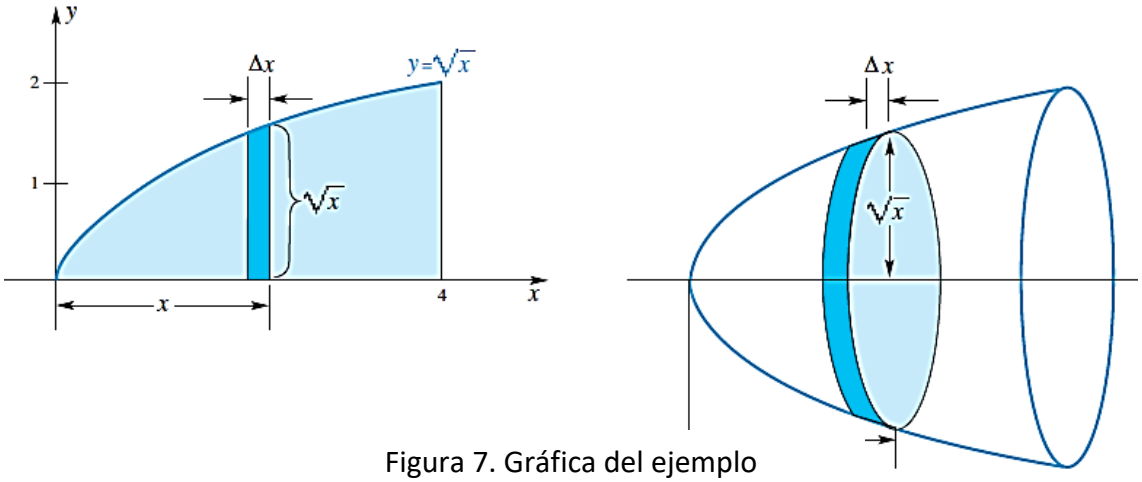


Figura 7. Gráfica del ejemplo
Fuente: (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007)

Para encontrar el valor del volumen utilizamos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Donde:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$a = 0$$

$$b = x = 4$$

Entonces:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_0^4 [\sqrt{x}]^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \left[\left(\frac{4^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right)\right] = \pi \left(\frac{16}{2}\right) = 8\pi \, u^3$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Ejemplo 2: Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por $f(x) = x^3$ y $y = 8$ y $x = 0$ alrededor del eje y.

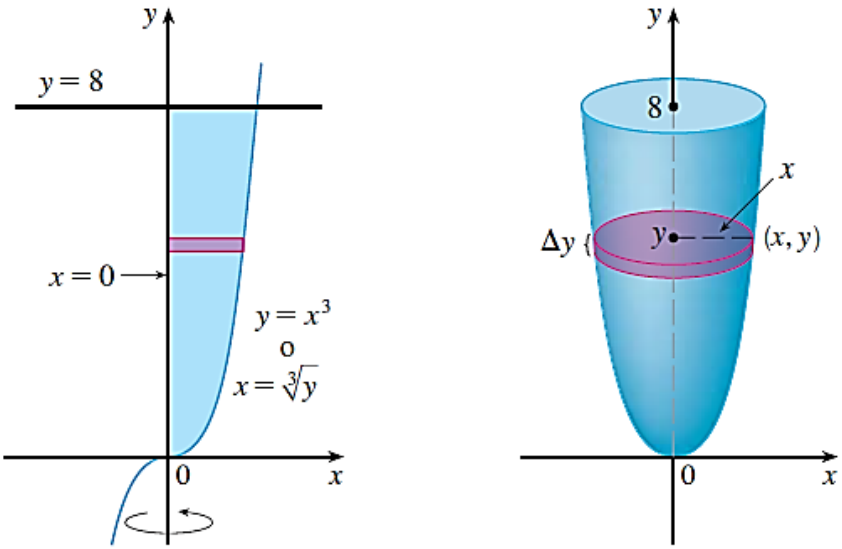


Figura 8. Gráfica del ejemplo
Fuente: (Stewart, 2012)

En primera instancia, debemos darnos cuenta que en este caso la región limitada rota a través del eje y, en el ejemplo anterior rotaba alrededor del eje x, por lo cual se utilizará:

$$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, dy$$

Donde:

$$a = 0$$

$$b = y = 8$$

Nosotros tenemos $f(x)$, pero no $f(y)$; para encontrarla hacemos lo siguiente:

$$f(x) = y = x^3$$

$$y = x^3$$

Despejando x:

$$y = x^3$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

$$\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3}$$

$$\sqrt[3]{y} = x$$

$$x = \sqrt[3]{y}$$

$$x = f(y) = \sqrt[3]{y}$$

Ahora bien, aplicando la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, dy = \pi \int_0^8 [\sqrt[3]{y}]^2 \, dy = \pi \int_0^8 y^{2/3} \, dy$$

$$V = \pi \int_0^8 y^{2/3} \, dy = \pi \left[\frac{3y^{5/3}}{5} \right]_0^8 = \pi \left[\frac{3(8)^{5/3}}{5} - \frac{3(0)^{5/3}}{5} \right]$$

$$V = \pi \left[\frac{3(8)^{5/3}}{5} - \frac{3(0)^{5/3}}{5} \right] = \pi \left(\frac{3 \cdot 8 \cdot \sqrt[3]{16}}{5} \right) = \pi \left(\frac{96}{5} \right) = \frac{96\pi}{5} \, u^3$$

Ejemplo 3: Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = 1$ alrededor de la recta $y = 1$.

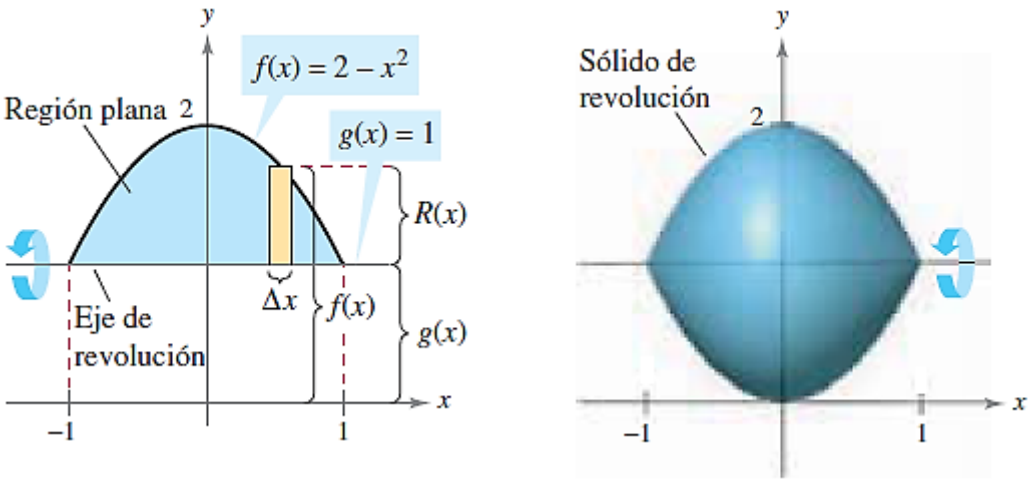


Figura 9. Gráfica del ejemplo
Fuente: (Larson & Edwards, 2010)

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

El sólido de revolución se forma al rotar sobre la recta $y = 1$, debido a que tal recta es paralela al eje de las x la fórmula a utilizar es:

$$V = \pi \int_a^b [F(x)]^2 \, dx$$

En este caso debemos encontrar a y b, esto lo hacemos igualando $f(x)$ y $g(x)$, ya que la región estas delimitada por estas funciones:

$$f(x) = g(x)$$

$$2 - x^2 = 1$$

$$-x^2 = 1 - 2$$

$$-x^2 = -1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \quad \wedge \quad x = 1$$

Entonces ya sabemos que $a = -1$ y $b = 1$. Ahora, ya se ha dicho que la gráfica no gira sobre el eje x, sino que gira alrededor de $g(x) = 1$; por lo tanto, debemos determinar la función que se utilizará en la fórmula del volumen:

$$V = \pi \int_a^b [F(x)]^2 \, dx$$

Para ello, solo debemos restar $g(x)$ de $f(x)$:

$$F(x) = f(x) - g(x) = 2 - x^2 - 1 = 1 - x^2$$

$$F(x) = 1 - x^2$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Aplicando:

$$V = \pi \int_a^b [F(x)]^2\, dx = \pi \int_{-1}^{1} [1 - x^2]^2\, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\, dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\, dx = \pi \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1}$$

$$V = \pi \left[\left(1 - \frac{2(1)^3}{3} + \frac{(1)^5}{5} \right) - \left(-1 - \frac{2(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^5}{5} \right) \right]$$

$$V = \pi \left[\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) \right] = \pi \left(\frac{8}{15} + \frac{8}{15} \right) = \frac{16\pi}{15}\ u^3$$

Método de arandelas.

La palabra arandelas hace referencia a los sólidos de revolución con una parte hueca; es decir, al momento de que las funciones que delimitan una región giran sobre un eje se forman sólidos que contienen un radio interior y otro exterior.

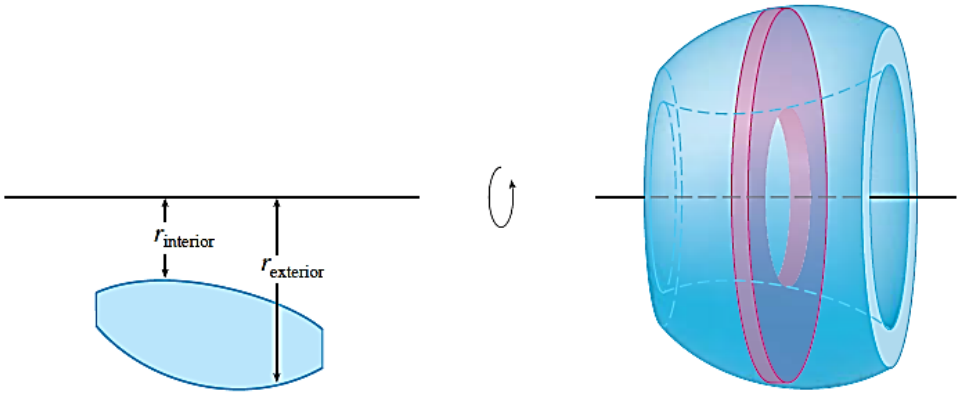


Figura 10. Método arandelas
Fuente: (Stewart, 2012)

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Antes de conocer la fórmula para encontrar el volumen de este tipo de sólidos, debemos saber que el área de este cilindro hueco está determinada por:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$

Donde:

$$R: \text{radio exterior}$$

$$r: \text{radio interior}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, el volumen estaría dado por:

$$V = A \cdot h$$

$$V = (\pi R^2 - \pi r^2) \cdot h$$

$$V = \pi(R^2 - r^2) \cdot h$$

Suponiendo que los radios están dados por funciones $R = f(x)$ y $r = g(x)$, cumpliéndose que $f(x) > g(x)$:

$$V = \pi[\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2] \cdot h$$

Método de arandelas: Sea un sólido de revolución, con un radio exterior $f(x)$ y un radio interior $g(x)$; su volumen viene dado por:

$$V = \pi \int_a^b [\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2]\, dx$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Método de arandelas: ejemplos

Ejemplo 4: Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las parábolas $y = x^2$ y $y = \sqrt{8x}$ en torno al eje x

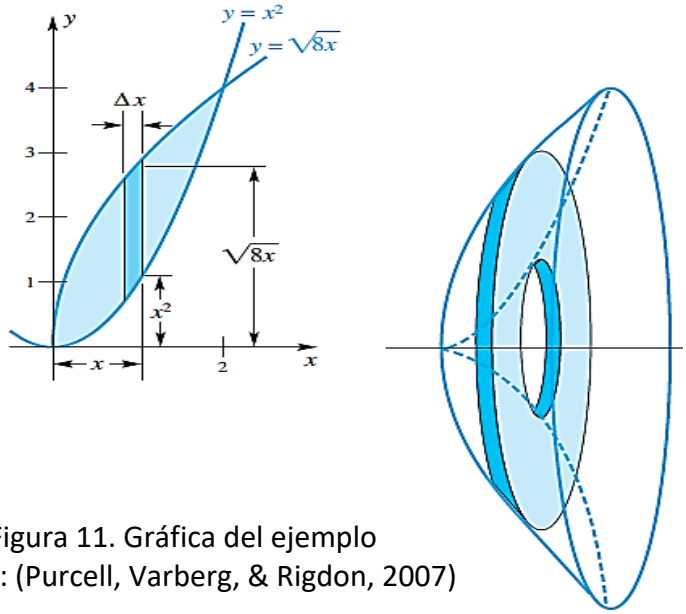


Figura 11. Gráfica del ejemplo
Fuente: (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007)

En este caso, podemos observar que la función $y = \sqrt{8x}$ está por arriba de la función $y = x^2$; por lo cual, $y = \sqrt{8x}$ es mayor que $y = x^2$. Para encontrar los límites de la región, igualamos las funciones, y tendremos los puntos donde se intersecan:

$$\sqrt{8x} = x^2$$

$$(\sqrt{8x})^2 = (x^2)^2$$

$$8x = x^4$$

$$x^4 - 8x = 0$$

$$x(x^3 - 8) = 0$$

$$x = 0 \quad \wedge \quad x = 2$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Entonces, $a = 0$ y $b = 2$. Teniendo esto, aplicamos la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]\, dx = \pi \int_0^2 [(\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2]\, dx$$

$$V = \pi \int_0^2 [8x - x^4]\, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{8(2)^2}{2} - \frac{(2)^5}{5}\right) - \left(\frac{8(0)^2}{2} - \frac{(0)^5}{5}\right)\right]$$

$$V = \pi \left(16 - \frac{32}{5}\right) = \frac{48\pi}{5}\ u^3$$

Ejemplo 5: Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las parábolas $y = x^2$ y $y = \sqrt{8x}$ en torno al eje y

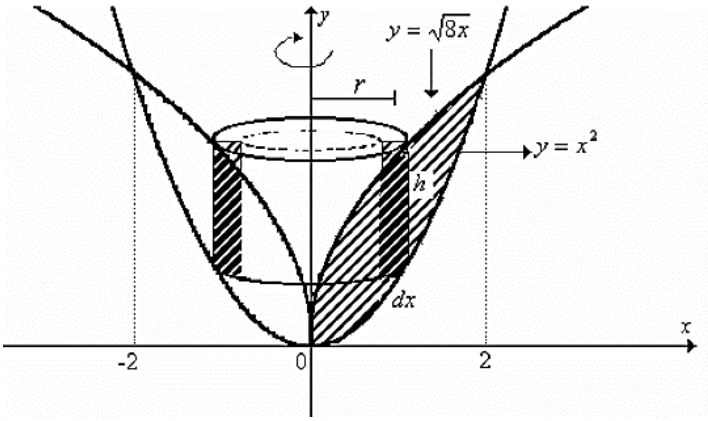


Figura 12. Gráfica del ejemplo
Fuente: (Villena Muñoz)

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Primero debemos despejar las funciones, de tal modo que queden expresadas en función de y:

$$y = f(x) = x^2$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2}$$

$$x = f(y) = \sqrt{y}$$

$$y = g(x) = \sqrt{8x}$$

$$y^2 = (\sqrt{8x})^2$$

$$y^2 = 8x$$

$$x = g(y) = \frac{y^2}{8}$$

Observando la gráfica del ejemplo, podemos notar que $f(y) > g(y)$.

Debido a que este ejemplo es similar al anterior, su única diferencia es su eje de rotación. Ahora bien, debemos encontrar la intersección de las funciones con respecto al eje y. Para ello, utilizamos lo que ya sabemos:

$$x = 0 \quad \wedge \quad x = 2$$

Evaluamos el valor de ambas x en unas de las funciones dadas, de esta manera encontraremos los límites denotados por a y b:

$$f(x) = x^2$$

$$f(0) = a = 0$$

$$f(2) = 2^2$$

$$f(2) = b = 4$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Teniendo todos estos datos, utilizamos la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b [(f(y))^2 - (g(y))^2]\, dy$$

$$V = \pi \int_0^4 [(\sqrt{y})^2 - \left(\frac{y^2}{8}\right)^2]\, dy = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^4}{64}\right) dy = \pi \int_0^4 \left(\frac{64y - y^4}{64}\right) dy$$

$$V = \frac{\pi}{64} \int_0^4 (64y - y^4)\, dy = \frac{\pi}{64} \left[\frac{64}{2} y^2 - \frac{y^5}{5}\right]_0^4$$

$$V = \frac{\pi}{64} \left[32y^2 - \frac{y^5}{5}\right]_0^4 = \frac{\pi}{64} \left[\left(32(4)^2 - \frac{(4)^5}{5}\right) - \left(32(0)^2 - \frac{(0)^5}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{64} \left(512 - \frac{1024}{5}\right)$$

$$V = \frac{\pi}{64} \left(\frac{2560 - 1024}{5}\right) = \frac{\pi}{64} \left(\frac{1536}{5}\right) = \frac{24\pi}{5}\ u^3$$

Ejemplo 6: Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por $x = \sqrt{4 - y^2}$ y el eje y $(x = 0)$ en torno a la recta $x = -1$

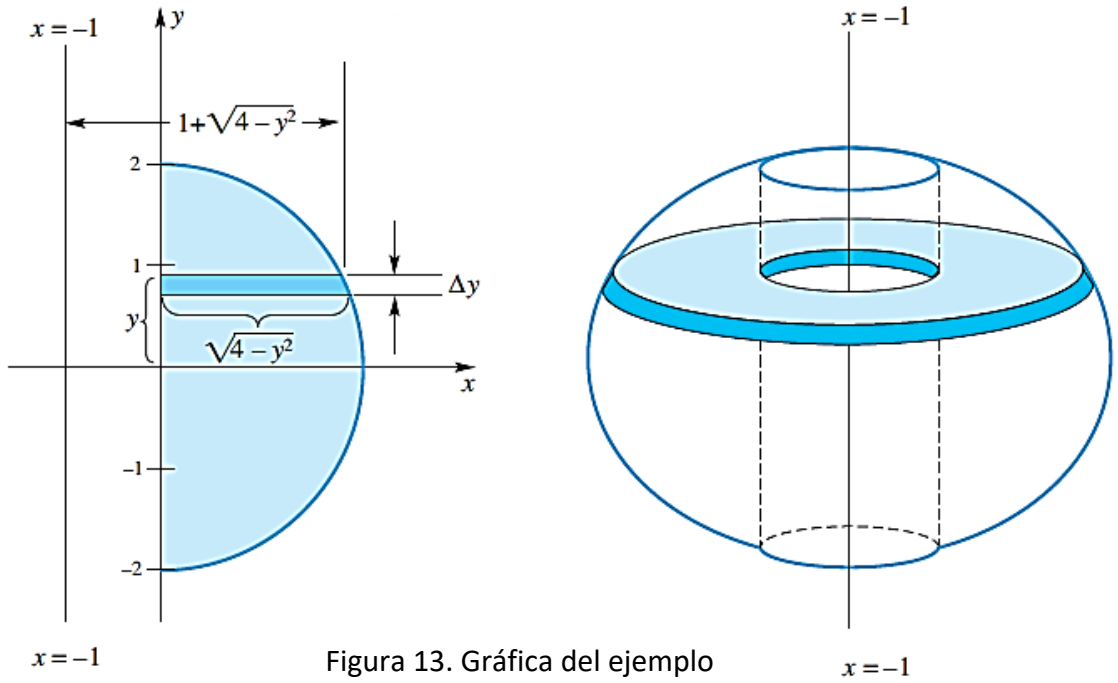


Figura 13. Gráfica del ejemplo
Fuente: (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007)

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

En esta ocasión, el eje de giro es paralelo al eje y, por lo tanto:

$$V = \pi \int_a^b [(f(y))^2 - (g(y))^2]\, dy$$

Debemos encontrar a y b, lo hacemos igualando las funciones y despejando:

$$\sqrt{4 - y^2} = 0$$

$$4 - y^2 = 0$$

$$-y^2 = -4$$

$$y^2 = 4$$

$$y = -2 \quad \wedge \quad y = 2$$

Entonces $a = -2$ y $b = 2$. Aquí el radio exterior es $\sqrt{4 - y^2} + 1$, debido a que el radio interior es 1:

$$x = f(y) = \sqrt{4 - y^2} + 1$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Se le suma uno debido a este radio interior, el

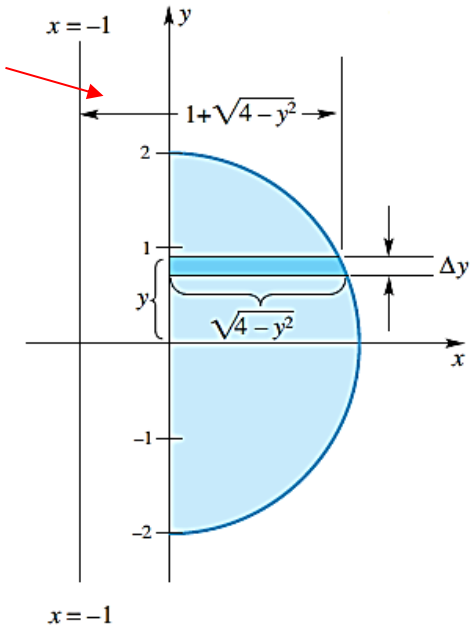


Figura 14. Gráfica del ejemplo
Fuente: (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007)

La función $g(y)$ es la que representa el eje y, es decir, $g(y) = 0$. Entonces:

$$V = \pi \int_a^b [(f(y))^2 - (g(y))^2]\, dy = \pi \int_{-2}^{2} [(\sqrt{4-y^2}+1)^2 - (1)^2]\, dy$$

Al desarrollar la integral con los debidos pasos, podremos encontrar el volumen del sólido de revolución:

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left[(\sqrt{4-y^2}+1)^2 - (1)^2\right] dy = \left(4\pi + \frac{32}{3}\right) u^3$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

2.2 Método de cascarones

Los métodos que se expusieron anteriormente no son los únicos procedimientos para calcular el volumen de los sólidos de revolución. En esta sección se expondrá el método de cascarones cilíndricos, el cual es un sólido acotado por dos cilindros rectos concéntricos. Para una mejor comprensión se sugiere observar la siguiente figura:

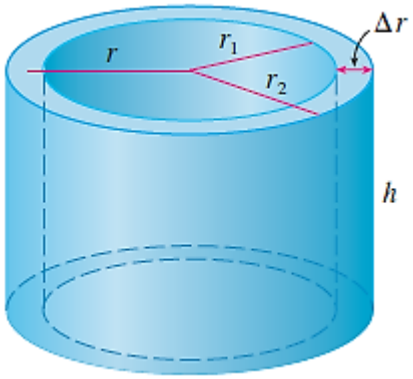


Figura 15. Cascarón cilíndrico
Fuente: (Stewart, 2012)

Para encontrar el volumen V de este cascarón cilíndrico, debemos calcular el volumen exterior V_2 y el volumen interior V_1, entonces:

$$V = V_2 - V_1$$

$$V = \pi(r_2)^2 h - \pi(r_1)^2 h$$

$$V = \pi[(r_2)^2 - (r_1)^2]h$$

$$V = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h$$

$$V = \pi(r_2 + r_1)h(r_2 - r_1)$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Haciendo:

$$r_2 + r_1 = \frac{2(r_2 + r_1)}{2}$$

$$r_2 - r_1 = \Delta r$$

Entonces:

$$V = \pi \left[\frac{2(r_2 + r_1)}{2}\right] h\Delta r$$

$$V = 2\pi \left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right) h\Delta r$$

Ahora:

$$\frac{r_2 + r_1}{2} = r$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$V = 2\pi \cdot r \cdot h \cdot \Delta r$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Partiendo de la fórmula para calcular el volumen de un cascarón, y teniendo en cuenta la imagen a continuación, obtendremos el modelo matemático para calcular el volumen de un sólido de revolución aplicando integrales:

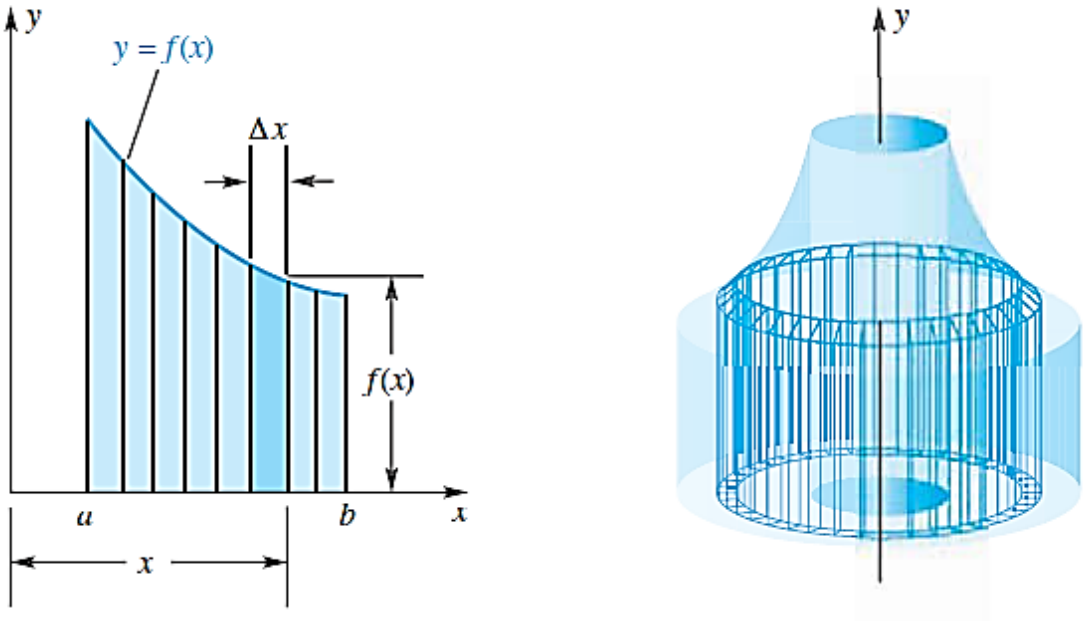


Figura 16. Método de cascarones
Fuente: (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007)

En la imagen del lado izquierdo, se puede observar una función $f(x)$, la cual ha sido dividida por n rectángulos dentro de un intervalo $[a, b]$. Ahora bien, si hacemos girar dicha región con respecto al eje de las y se formará un sólido de revolución, y cada rectángulo producirá n cascarones cilíndricos. Por lo tanto, para determinar el volumen del sólido se utilizará un límite:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Donde sabemos que:

$$Volumen\ del\ cascarón\ cilíndrico = 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x$$

Por lo tanto, el límite expuesto antes nos lleva a lo siguiente:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$$

Método de cascarones: El volumen de un sólido, representado por cascarones cilíndricos, el cual se obtiene al girar alrededor del eje y la región bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b es:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx \qquad \text{donde} \qquad 0 \le a < b$$

Método de cascarones: ejemplos

Ejemplo 7: determinar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$

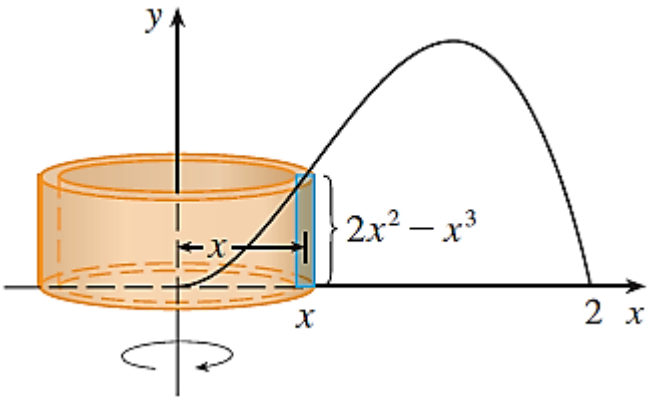


Figura 17. Gráfica del ejemplo
Fuente: (Stewart, 2012)

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Antes de calcular el volumen debemos obtener los límites de la región. Aquello lo realizamos igualando las funciones que delimitan la región:

$$2x^2 - x^3 = 0$$

$$x(2x - x^2) = 0$$

$$x = 0 \quad \wedge \quad x = 2$$

Por lo tanto:

$$a = 0 \quad \wedge \quad b = 2$$

Aplicando la fórmula obtenida antes para calcular el volumen:

$$V = 2\pi \int_0^2 xf(x)\,dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3)\,dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4\,dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 2\pi \left[\left(\frac{2(2)^4}{4} - \frac{(2)^5}{5}\right) - \left(\frac{2(0)^4}{4} - \frac{(0)^5}{5}\right)\right]$$

$$V = 2\pi \left[\frac{32}{4} - \frac{32}{5}\right] = 2\pi \left(\frac{8}{5}\right) = \frac{16\pi}{5}\ u^3$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Ejemplo 8: determinar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región delimitada por $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, el eje x, $x = 1$, $x = 4$

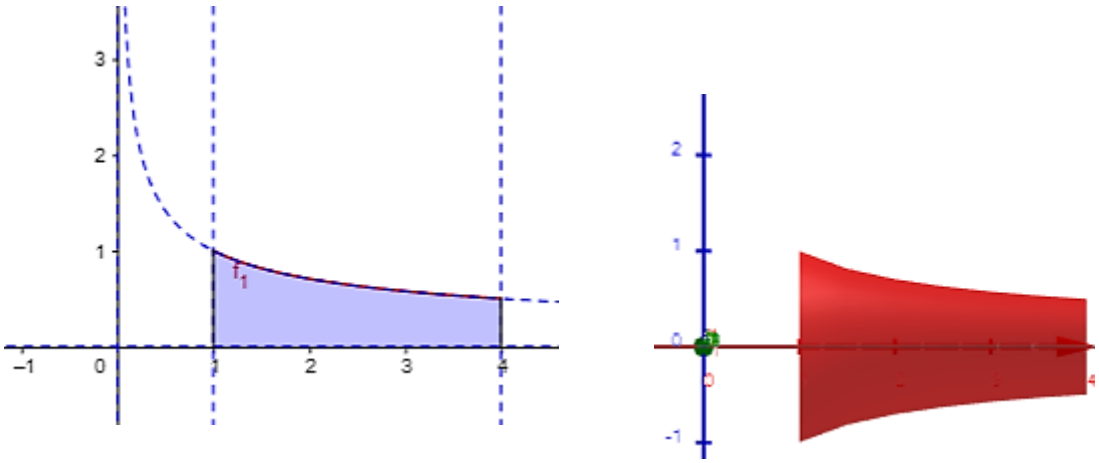


Figura 18. Gráfica del ejemplo
Fuente: Elaboración propia

En este caso tenemos:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$a = 1$$

$$b = 4$$

Aplicando la fórmula:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

$$V = 2\pi \int_1^4 x \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$V = 2\pi \int_1^4 x^{1/2}\, dx$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

$$V = 2\pi\left[\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_1^4 = 2\pi\left[\left(\frac{2(4)^{3/2}}{3}\right) - \left(\frac{2(1)^{3/2}}{3}\right)\right]$$

$$V = 2\pi\left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{28\pi}{3}\ u^3$$

Ejemplo 9: determinar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región delimitada por $y = x$ y $y = x^2$

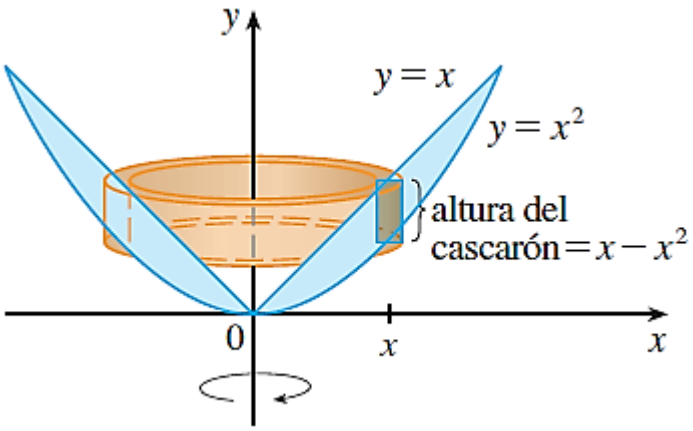


Figura 19. Gráfica del ejemplo
Fuente: (Stewart, 2012)

Para encontrar a y b igualamos las funciones:

$$x = x^2$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \quad \wedge \quad x = 1$$

Por lo tanto:

$$a = 0 \quad \wedge \quad b = 1$$

La altura $f(x)$ estará dada por la diferencia de las funciones:

$$f(x) = x - x^2$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

Teniendo tales valores, utilizamos la fórmula:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^2)\,dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 x^2 - x^3\,dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$V = 2\pi \left[\left(\frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^4}{4}\right) - \left(\frac{(0)^3}{3} - \frac{(0)^4}{4}\right)\right]$$

$$V = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi \left(\frac{1}{12}\right) = \frac{\pi}{6}\ u^3$$

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

3. Recursos complementarios

Los siguientes recursos complementarios son sugerencias para que se pueda ampliar la información sobre el tema trabajado, como parte de su proceso de aprendizaje autónomo:

- Método de cascarones con dos funciones de y. (2013). Recuperado el 5 January 2020, de
- https://www.youtube.com/watch?v=XDZ8QZpeY78
- Método de cascarones rotando alrededor de eje horizontal. (2013). Recuperado el 5 January 2020, de
- https://www.youtube.com/watch?v=_BOi_3L042E
- El método de los discos alrededor del eje “x”. (2013). Recuperado el 5 January 2020, de
- https://www.youtube.com/watch?v=QNLd6TEGOOw

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI

4. Bibliografía

- Allen, A. (2008). Álgebra intermedia. México: PEARSON EDUCACIÓN. Obtenido de https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/algebra_angel_cap7.pdf
- Ayres, F. (1974). Cálculo diferencial e integral. México D.F.: LITOGRÁFICA INGRAMEX S.A.
- Granville, W. (2009). Cálculo diferencial e integral. Limusa, México: EDITORIAL LIMUSA S.A.
- Larson, R., & Edwards, B. (2010). Cálculo 1 de una variable. México D.F: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES S.A.
- Pérez González, J. (s.f.). Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. Granada: Departamento de análisis matemático: Universidad de Granada.
- Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). Cálculo diferencial e integral. México: PEARSON EDUCACIÓN.
- Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C. (1969). Análisis matemático. Buenos Aires: EDITORIAL KAPELUSZ S.A.
- Stewart, J. (2012). Cálculo de una variable. México D.F.: Cengage Learning Editores S.A.
- Thomas, G. (2006). Cálculo. Una variable. México: PEARSON EDUCACIÓN.
- Villena M. (2008). Cálculo Integral.

© Universidad Estatal de Milagro – UNEMI