UNIDAD 4

ECUACIONES DIFERENCIALES

TEMA 1:
Introducción a la transformada de Lapalce

FR0018/ v1.0 / 18-11-2019

UNEMI ONLINE

ÍNDICE

1. Unidad 4: La transformada de Laplace y su aplicación para resolver ecuaciones diferenciales

Tema 1: Introducción a la transformada de Laplace.

Objetivos:

- Definir la Transformada de Laplace.
- Determinar la transformada inversa de Laplace.
- Conocer las funciones escalonadas.
- Aplicar el primer y segundo teorema de traslación.

Introducción:

El método de la transformación de Laplace es una técnica para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. Se usa comúnmente para resolver problemas de sistemas y circuitos eléctricos. Pierre Laplace fue un astrónomo, físico y matemático de origen francés; a el se atribuye el nombre de una de las transformadas mas importantes en el campo de estudio de las ecuaciones diferenciales.

En este subtema se determinará cómo usar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales. Hay muchos tipos de transformaciones en el mundo. Las transformadas de Laplace y las transformadas de Fourier son probablemente los dos tipos principales de transformaciones que más se utilizan. Como se estudiará en secciones posteriores, se puede usar transformadas de Laplace para reducir una ecuación diferencial a un problema de álgebra. El álgebra puede ser desordenado en ocasiones, pero será más simple que resolver la ecuación diferencial directamente en muchos casos. Las transformaciones de Laplace también se pueden usar para resolver problemas de valor inicial (PVI) en las que no se puede usar ningún método anteriormente estudiado (Zill, 2008).

Para ecuaciones diferenciales "simples" como las de los primeros subtemas, las transformaciones de Laplace serán más complicadas de lo que se necesita. De hecho, para la mayoría de las ecuaciones diferenciales homogéneas, las transformaciones de Laplace son significativamente más largas y no tan útiles. Además, muchas de las ecuaciones diferenciales no homogéneas "simples" en los Coeficientes Indeterminados y la Variación de Parámetros son aún más simples (o al menos no más difíciles que las transformadas de Laplace) (José Becerril, 2004). Sin embargo, en este punto, la cantidad de trabajo requerida para las transformaciones de Laplace está comenzando a ser igual a la cantidad de trabajo que se empleó en las unidades anteriores.

2. Información de los subtemas

2.1 Subtema 1: Definición y propiedades de la transformada de Laplace.

Definición de la transformada de Laplace

Sea la función $f(t)$ una función continua por tramos o en todo su dominio. La Transformada de Laplace de $f(t)$ es denotada como $\mathcal{L}\{f(t)\}$ y se define como la integral impropia:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

(DiPrima, 2010).

De la definición anterior, se tiene una notación alternativa para las transformaciones de Laplace. Por conveniencia, a menudo se denotará la transformada de Laplace como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

Con esta notación alternativa, tenga en cuenta que la transformada de Laplace es realmente una función de una nueva variable, esta variable es "s" y toda la expresión que depende de t en la función se abandonará en el proceso de integración. Ahora, la integral en la definición de la transformación es una integral impropia y probablemente sería mejor recordar cómo funcionan este tipo de integrales antes de poder calcular algunas transformaciones (Lang, 1980).

Adicionalmente, una función continua por tramos o también llamada seccionalmente continua, es aquella que es continua en todo su dominio excepto en una cantidad finita de puntos, un ejemplo se muestra en la siguiente figura (William Boyce, 2010).

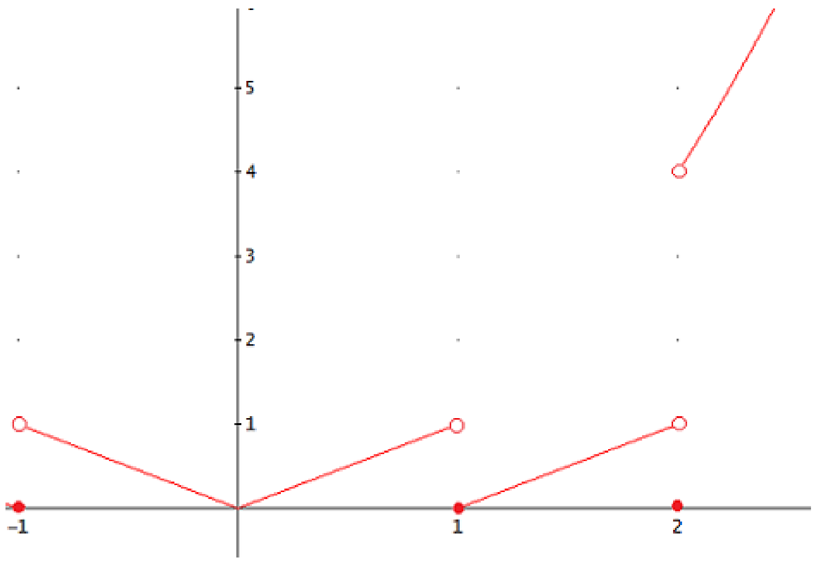

Figura 1: Función continua por tramos (seccionalmente continua).

Fuente: Creative commons Microsoft Word.

Ejemplos:

1. *Calcular:* $\mathcal{L}\{1\}$

Solución:

Para este caso, se tiene que $f(t) = 1$. Aplicando la definición de la transformada de Laplace, se tiene:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_{0}^{+\infty} e^{-st}\,(1)\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-st}\;dt$$

En esta última expresión, debido a que se tiene una integral impropia, se aplica el cambio de variable en el extremo superior de integración y se aplica límite en dicha variable, esto es:

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} e^{-st}\;dt$$

Luego se calcula la integral impropia primero integrando, luego evaluando los límites de integración y finalmente calculando el límite al infinito, de ahí que:

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]\Big|_0^b$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{e^{-sb}}{-s} - \frac{e^{-s(0)}}{-s}\right]$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s}\right]$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{se^{sb}} + \frac{1}{s}\right]$$

En esta última expresión se puede observar que cuando "b" tiende al infinito, entonces la primera fracción tiende a cero siempre que "s" sea positivo y la segunda fracción al ser contante queda igual; por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \qquad , \qquad s > 0$$

Como se puede observar, la transformada de Laplace resulta una expresión que depende de una nueva variable, en este caso "s". Se debe tener en cuenta que se tuvo que poner una restricción en “s” para poder calcular la transformación. Todas las transformaciones de Laplace tendrán restricciones en “s”. En esta etapa del juego, esta restricción es algo que tendemos a ignorar, pero realmente nunca debemos olvidar que está ahí.

2. *Calcular:* $\mathcal{L}\{e^{at}\}$

Solución:

Para este caso, se tiene que $f(t) = e^{at}$. Aplicando la definición de la transformada de Laplace, se tiene:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,(e^{at})\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}\,dt$$

De igual manera que el caso anterior, debido a que se tiene una integral impropia, se aplica el cambio de variable en el extremo superior de integración y se aplica límite en dicha variable, esto es:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{(a-s)t}\ dt$$

Luego se calcula la integral impropia primero integrando, luego evaluando los límites de integración y finalmente calculando el límite al infinito, de ahí que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]\Big|_0^b$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{e^{(a-s)b}}{a-s} - \frac{e^{(a-s)(0)}}{a-s}\right]$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{e^{(a-s)b}}{a-s} + \frac{1}{s-a}\right]$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{(a-s)e^{(a-s)b}} + \frac{1}{s-a}\right]$$

En esta última expresión se puede observar que cuando "b" tiende al infinito, entonces la primera fracción tiende a cero siempre que "$a-s$" sea positivo (es decir, $s > a$) y la segunda fracción al ser contante queda igual; por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \qquad , \qquad s > a$$

3. *Calcular:* $\mathcal{L}\{sen(at)\}$

Solución:

Para este caso, se tiene que $f(t) = sen(at)$. Aplicando la definición de la transformada de Laplace, se tiene:

$$\mathcal{L}\{sen(at)\} = \int_{0}^{+\infty} e^{-st}\left(sen(at)\right) dt = \int_{0}^{+\infty} sen(at)e^{-st}\ dt$$

Así como en los casos anteriores, se procede con la integración impropia:

$$\mathcal{L}\{sen(at)\} = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} sen(at)e^{-st}\ dt$$

Para este caso, primero se realizará la integración por partes de la expresión $\int sen(at)e^{-st}\ dt$. Se realizan los cambios de variables respectivos:

$$u = e^{-st} \qquad \rightarrow \qquad du = -se^{-st}\ dt$$

$$dv = sen(at)dt \qquad \rightarrow \qquad v = -\frac{cos(at)}{a}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int sen(at)e^{-st}\ dt = e^{-st}\left(-\frac{cos(at)}{a}\right) - \int\left(-\frac{cos(at)}{a}\right)\left(-se^{-st}dt\right)$$

$$\int sen(at)e^{-st}\ dt = -\frac{1}{a}\,e^{-st}\,cos(at) - \frac{s}{a}\int cos(at)\,e^{-st}\ dt$$

En el miembro derecho de la ecuación nuevamente se tiene que aplicar integración por partes:

$$u = e^{-st} \qquad \rightarrow \qquad du = -se^{-st}\ dt$$

$$dv = cos(at)dt \qquad \rightarrow \qquad v = \frac{sen(at)}{a}$$

Reemplazando nuevamente se tiene:

$$\int sen(at)e^{-st}\ dt = -\frac{1}{a}\ e^{-st}\ cos(at) - \frac{s}{a}\left[e^{-st}\ \frac{sen(at)}{a}\ -\ \int\left(\frac{sen(at)}{a}\right)(-se^{-st}\ dt)\right]$$

$$\int sen(at)e^{-st}\ dt = -\frac{1}{a}\ e^{-st}\ cos(at) - \frac{s}{a}\left[\frac{1}{a}e^{-st}\ sen(at) + \frac{s}{a}\int sen(at)e^{-st}\ dt\right]$$

$$\int sen(at)e^{-st}\ dt = -\frac{1}{a}\ e^{-st}\ cos(at) - \frac{s}{a^2}e^{-st}\ sen(at) - \frac{s^2}{a^2}\int sen(at)e^{-st}\ dt$$

En este caso se tiene una ecuación integral en la que se procede a despejar la antiderivada solicitada:

$$\int sen(at)e^{-st}\ dt + \frac{s^2}{a^2}\int sen(at)e^{-st}\ dt = -\frac{1}{a}\ e^{-st}\ cos(at) - \frac{s}{a^2}e^{-st}\ sen(at)$$

Agrupando y factorizando:

$$\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)\int sen(at)e^{-st}\ dt = -\frac{1}{a}\ e^{-st}\ \left[cos(at) + \frac{s}{a}sen(at)\right]$$

Despejando y manipulando algebraicamente se tiene:

$$\int sen(at)e^{-st}\ dt = \frac{-\frac{1}{a}}{\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)}\ e^{-st}\ \left[cos(at) + \frac{s}{a}sen(at)\right]$$

$$\int sen(at)e^{-st}\ dt = \frac{-\frac{1}{a}}{\left(\frac{a^2+s^2}{a^2}\right)}\ e^{-st}\ \left[cos(at) + \frac{s}{a}sen(at)\right]$$

$$\int sen(at)e^{-st}\ dt = \frac{-a}{a^2+s^2}\ e^{-st}\ \left[cos(at) + \frac{s}{a}sen(at)\right]$$

Ahora, retomando la integral impropia, se tiene:

$$\mathcal{L}\{sen(at)\} = \lim_{b\to+\infty} \left\{\frac{-a}{a^2+s^2}\; e^{-st}\; \left[cos(at) + \frac{s}{a} sen(at)\right]\right\}\Big|_0^b$$

Sacando la constante del límite:

$$\mathcal{L}\{sen(at)\} = \frac{-a}{a^2+s^2} \lim_{b\to+\infty} \left\{e^{-st}\; \left[cos(at) + \frac{s}{a} sen(at)\right]\right\}\Big|_0^b$$

Evaluando los límites de integración:

$$\mathcal{L}\{sen(at)\} = \frac{-a}{a^2+s^2}\; \lim_{b\to+\infty} \left\{e^{-sb}\; \left[cos(ab) + \frac{s}{a} sen(ab)\right] - e^{-s(0)}\; \left[cos(0) + \frac{s}{a} sen(0)\right]\right\}$$

$$\mathcal{L}\{sen(at)\} = \frac{-a}{a^2+s^2}\; \lim_{b\to+\infty} \left\{e^{-sb}\; \left[cos(ab) - \frac{s}{a} sen(ab)\right] - 1\right\}$$

$$\mathcal{L}\{sen(at)\} = \frac{-a}{a^2+s^2}\; \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{cos(ab) - \frac{s}{a} sen(ab)}{e^{sb}} - 1\right]$$

En esta última expresión se puede observar que cuando "b" tiende al infinito, entonces la primera fracción tiende a cero siempre que "s" sea positivo (es decir, $s > 0$); esto se cumple porque la expresión del numerador corresponde a una función acotada; por otro lado, la segunda expresión al ser contante queda igual; por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{sen(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad , \qquad s > 0$$

Como se pudo observar de los ejemplos anteriores, para determinar la transformada de Laplace existe casos muy simples, así como también cálculos que ameritan un mayor esfuerzo y procedimiento para lograrlo.

A continuación, mediante una tabla, se presentan algunas transformadas de Laplace:

Función $f(t)$	**Transformada $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$**	**Condición**
k	$\frac{k}{s}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n \quad , \quad n \in Z^+$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$t^p \quad , \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$s > 0$
$sen(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$cos\,(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$senh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
$cosh\,(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$

Tabla 1: Transformada de Laplace de algunas funciones

Fuente:(William Boyce, 2010)

En la tabla anterior, se muestran algunas funciones utilizadas con poca frecuencia en cursos básicos de Matemática, su uso está mas concentrado en la Estadística y en la aplicación de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales, estas son las funciones hiperbólicas y la función Gamma. A continuación, mediante otra tabla, se definen de forma sencilla estas funciones:

Función especial	Definición	Dominio
$f(t) = senh(t)$	$f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$	R
$f(t) = cosh(t)$	$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$	R
$f(t) = \Gamma(t)$	$f(t) = \int_0^{+\infty} \tau^{t-1}\ e^{-\tau}\, d\tau$ Algunas propiedades importantes: $\Gamma(n) = (n-1)!\ ,\qquad n \in Z^+$ $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$ $\Gamma(1) = 1$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$	R

Tabla 2: Definiciones de algunas funciones especiales

Fuente:(Apostol, 1960)

Propiedades de la Transformada de Laplace

La transformada de Laplace posee muchas propiedades que se aplican tanto en su definición como en su aplicación a los problemas de valor inicial (PVI) de las ecuaciones diferenciales, entre estas se tiene:

Propiedad de Linealidad

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones, entonces:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$$

Para cualquier constante $\alpha, \beta \ \in R$.

Propiedad de cambio de escala

Sea $f(t)$ una función con transformada de Laplace $F(s)$ y sea $\alpha \in R-\{0\}$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Propiedad de desplazamiento

Sea $f(t)$ una función con transformada de Laplace $F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

Para cualquier constante $a \in R$.

Propiedad de la derivada

Sea $f(t)$ una función derivable con transformada de Laplace $F(s)$ y cuyo valor inicial $f(0)$ está definido, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d(f(t))}{dt}\right\} = s\,F(s) - f(0)$$

Propiedad de la segunda derivada

Sea $f(t)$ una función dos veces derivable con transformada de Laplace $F(s)$ y cuyos valores iniciales $f(0)$, $f'(0)$ están definidos, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2(f(t))}{dt^2}\right\} = s^2\,F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Propiedad de la n-ésima derivada

Sea $f(t)$ una función n veces derivable con transformada de Laplace $F(s)$ y cuyos valores iniciales $f(0)$, $f'(0)$, …, $f^{(n-1)}(0)$ están definidos, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n(f(t))}{dt^n}\right\} = s^n\,F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Propiedad de la integral

Sea $f(t)$ una función integrable con transformada de Laplace $F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Propiedad del producto con el monomio t

Sea $f(t)$ una función con transformada de Laplace $F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{t\,f(t)\} = -\frac{d(F(s))}{ds}$$

Propiedad del producto con el monomio t^n

Sea $f(t)$ una función con transformada de Laplace $F(s)$ y sea $n \in N$, entonces:

$$\mathcal{L}\{t^n\,f(t)\} = (-1)^n\frac{d^n(F(s))}{ds^n}$$

Ejemplo:

Calcular: $\mathcal{L}\{4e^{-3t}t^5 + 3senh(2t) - tcos(t)\}$

Solución:

En esta transformada, primero se aplica la propiedad de linealidad, quedando de esta forma tres transformadas a calcular, esto es:

$$\mathcal{L}\{4e^{-3t}t^5 + 3senh(2t) - tcos(t)\} = 4\mathcal{L}\{e^{-3t}t^5\} + 3\mathcal{L}\{senh(2t)\} - \mathcal{L}\{tcos(t)\}$$

Luego, se aplican respectivamente, las propiedades de desplazamiento, cambio de escala y el producto con el monomio t:

Aplicando propiedad de desplazamiento:

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}t^5\} = F(s+3)$$

Donde:

$$F(s) = \mathcal{L}\{t^5\} = \frac{5!}{s^6}$$

De ahí que:

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}t^5\} = \frac{5!}{(s+3)^6}$$

Aplicando propiedad de cambio de escala:

$$\mathcal{L}\{senh(2t)\} = \frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right)$$

Donde:

$$F(s) = \mathcal{L}\{senh(t)\} = \frac{1}{s^2-1}$$

De ahí que:

$$\mathcal{L}\{senh(2t)\} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{s^2-4}{4}} = \frac{1}{2}\frac{4}{s^2-4} = \frac{2}{s^2-4}$$

Aplicando propiedad de producto con el monomio t:

$$\mathcal{L}\{tcos(t)\} = -\frac{d(F(s))}{ds}$$

Donde:

$$F(s) = \mathcal{L}\{cos(t)\} = \frac{s}{s^2+1}$$

De ahí que:

$$\mathcal{L}\{tcos(t)\} = -\frac{d\left(\frac{s}{s^2+1}\right)}{ds}$$

$$\mathcal{L}\{tcos(t)\} = -\frac{(1)(s^2+1)-(s)(2s)}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{tcos(t)\} = -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{tcos(t)\} = -\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{tcos(t)\} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

Finalmente, se tiene:

$$\mathcal{L}\{4e^{-3t}t^5 + 3senh(2t) - tcos(t)\} = 4\frac{5!}{(s+3)^6} + 3\frac{2}{s^2-4} - \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{4e^{-3t}t^5 + 3senh(2t) - tcos(t)\} = \frac{480}{(s+3)^6} + \frac{6}{s^2-4} - \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

2.2 Subtema 2: Transformada inversa de Laplace.

Transformada inversa de Laplace

Encontrar la transformación de Laplace de una función no es terriblemente difícil si se tiene una tabla de transformaciones disponible para usar, como la mostrada en subtema anterior. Lo que ahora se debe hacer es todo lo opuesto. Se van a dar las transformadas $F(s)$, y se debe preguntar qué función (o funciones) se tenían originalmente para haber obtenido dicha transformada. Como se estudiará a continuación, esto puede ser un proceso más complicado y largo que tomar transformaciones. En estos casos se dice que se está calculando la Transformada de Laplace Inversa de F(s), cuya notación es:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

(José Becerril, 2004).

Ejemplo:

1. *Calcular:* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-5}{s^2+5}\right\}$

Solución:

En muchos casos, para determinar la transformada inversa de Laplace, se deben separar las fracciones y aplicar propiedad de linealidad de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-5}{s^2+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s}{s^2+5} - \frac{5}{s^2+5}\right\} = 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+5}\right\}$$

Luego, se debe observar muy detenidamente la similitud de las transformadas presentes y se debe comparar con las conocidas en la tabla dada en el subtema anterior. En el primer caso se tiene una expresión similar a la transformada de la función coseno y en el segundo caso se tiene una similitud con la función seno. Una vez detectadas las similitudes, se procede a realizar los ajustes con respecto a los factores presentes o faltantes, esto es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-5}{s^2+5}\right\} = 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\sqrt{5}^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}{s^2+\sqrt{5}^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-5}{s^2+5}\right\} = 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\sqrt{5}^2}\right\} - \frac{5}{\sqrt{5}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}}{s^2+\sqrt{5}^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-5}{s^2+5}\right\} = 6cos(\sqrt{5}t) - \frac{5}{\sqrt{5}}sen(\sqrt{5}t)$$

2. *Calcular:* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2-4s-12}\right\}$

Solución:

Para calcular la transformada inversa de Laplace en este tipo de expresiones, se pueden aplicar algunos métodos; se puede aplicar descomposición en fracciones parciales o también se puede aplicar completación de cuadrados en el trinomio del denominador. En este caso se aplicará completación de cuadrados.

Completando cuadrados, se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2-4s-12}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{(s^2-4s+4)-4-12}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2-4s-12}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{(s-2)^2-16}\right\}$$

Luego, se separan las fracciones y se aplica linealidad:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2-4s-12}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)^2-16}\right\} + 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2-16}\right\}$$

En la primera transformada inversa a calcular, se puede observar cierta similitud con la función coseno hiperbólico, pero además se debe observar que existe una especie de desplazamiento; para realizar ese ajuste, se suma y se resta 2 unidades y además también se ajusta la segunda fracción:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2-4s-12}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-2)+2}{(s-2)^2-16}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{(s-2)^2-16}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2-4s-12}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-2)}{(s-2)^2-16}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{(s-2)^2-16}\right\}$$

De esto último, se puede decir lo siguiente:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2-4s-12}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-2)}{(s-2)^2-16}\right\} + \frac{9}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-2)^2-16}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2-4s-12}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-2)\} + \frac{9}{4}\mathcal{L}^{-1}\{G(s-2)\}$$

Por propiedad de desplazamiento, se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2-4s-12}\right\} = e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \frac{9}{4}e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Donde:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - 16}$$

$$G(s) = \frac{4}{s^2 - 16}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2 - 4s - 12}\right\} = e^{2t}cosh\,(4t) + \frac{9}{4}e^{2t}senh(4t)$$

2.3 Subtema 3: Funciones escalonadas

Funciones escalonadas

Antes de proceder con la resolución de las ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace, se deben estudiar dos funciones conocidas como escalonadas que permitirán simplificar ciertos problemas (Edwin Purcell, Dale Varberg, 2007). A continuación, se definen estas funciones escalonadas y adicionalmente se muestran sus correspondientes transformadas de Laplace y las propiedades consecuentes.

Función Escalón Unitario o Heaviside

Definición de Función Escalón Unitario

La función Escalón Unitario se define como:

$$\mu_c(t) = \begin{cases} 1\,; si\ t > c \\ 0\,; si\ t \leq c \end{cases}$$

Su gráfica se muestra a continuación:

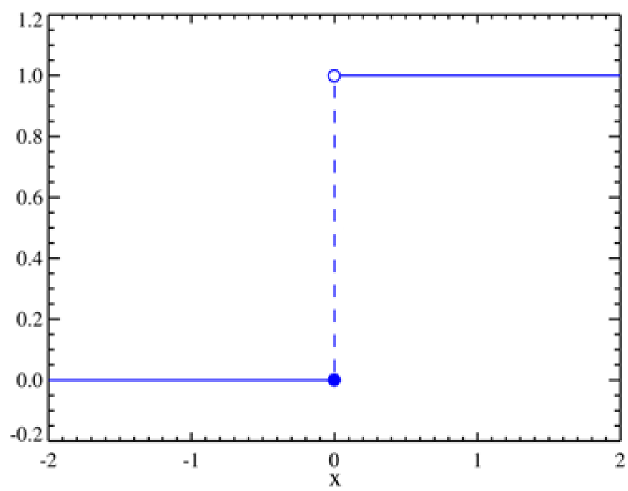

Figura 2: Gráfica de la función Escalón Unitario $\mu_0(t)$.

Fuente: Creative commons Microsoft Word.

Propiedades de la Función Escalón Unitario

Mediante una tabla, a continuación, se presenta la transformada de Laplace de la función Escalón Unitario y de la transformada del producto de esta función con cualquier otra.

Función	Transformada de Laplace	Condición
$\mu_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	$s > 0$
$\mu_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	$s > a$

Tabla 3: Transformada de Laplace y propiedad de la función Escalón Unitario

Fuente:(Aguirregabiria, 2000)

Distribución Impulso Unitario o Delta de Dirac

El concepto de Distribución es un concepto mucho más generalizado que el de funciones, este es el caso de la Distribución o función generalizada Delta de Dirac. La teoría de Distribuciones amplía mucho más el panorama de la teoría de funciones y como ejemplo, para aplicaciones más interesantes se tienen la Distribuciones Temperadas de Laurent Schwartz, quien fue un matemático de origen francés.

Definición de Distribución Impulso Unitario

La distribución Impulso Unitario se define como:

$$\delta_c(t) = \begin{cases} 1\,; si\ t = c \\ 0\,; si\ t \neq c \end{cases}$$

Su gráfica se muestra a continuación:

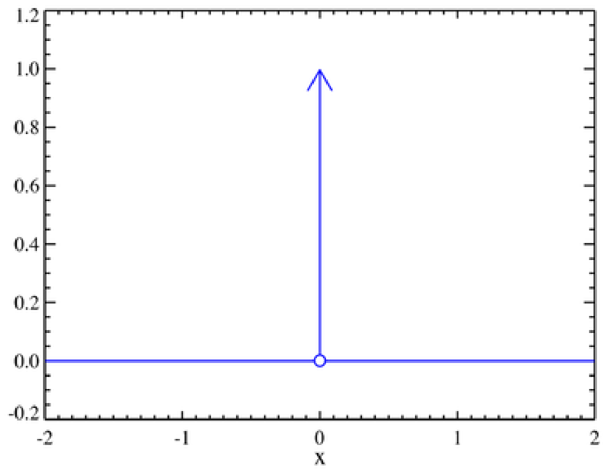

Figura 3: Gráfica de la función generalizada Impulso Unitario $\delta_0(t)$.

Fuente: Creative commons Microsoft Word.

Transformada de Laplace de la Distribución Impulso Unitario

Mediante una tabla, a continuación, se presenta la transformada de Laplace de la función generalizada Impulso Unitario.

Función	Transformada de Laplace	Condición
$\delta_c(t)$	e^{-cs}	$s > 0$

Tabla 4: Transformada de Laplace de la distribución Impulso Unitario

Fuente:(Aguirregabiria, 2000)

2.4 Subtema 4: Primer y segundo teorema de traslación

Primer y segundo teorema de traslación

Estos dos teoremas ya fueron estudiados en los subtemas anteriores; sin embargo, es importante diferenciar estos teoremas de las demás propiedades de la Transformada de Laplace debido a sus aplicaciones cuando aparecen productos entre funciones. A continuación, mediante la siguiente tabla, se muestran los teoremas de traslación.

Teorema	Expresión	Transformada de Laplace	Condición
Primer Teorema de Traslación	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$s>0$
Segundo Teorema de Traslación	$\mu_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	$s>0$

Tabla 5: Teoremas de Traslación

Fuente:(Aguirregabiria, 2000)

3. Bibliografía

- Aguirregabiria, J. (2000). *Ecuaciones diferenciales ordinarias para estudiantes de Física* (1ra ed.). Servicio editorial de la Universidad del país Vasco.
- Apostol, T. (1960). *Mathematical Analysis, a modern approach to advanced Calculus* (2da ed.). Addison-Wesley Publishing Company.
- Edwin Purcell, Dale Varberg, S. R. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. Pearson Education.
- José Becerril, D. E. (2004). *Ecuaciones diferenciales, técnicas de solución y aplicaciones* (1ra ed.). Universidad Autónoma Metropolitana.
- Lang, S. (1980). *Cálculo II* (F. E. Interamericano (ed.); 3ra ed.). Fondo educativo interamericano.
- William Boyce, R. D. (2010). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (5ta ed.). Limusa Wiley.
- Zill, D. (2008). *Matemáticas avanzadas para la ingeniería, Ecuaciones diferenciales* (3ra ed.). Mc Graw Hill.